На правах рукописи

Тимиршин Марсель Рустэмович

МЕТОД ГРАФИКОВ И ПРОБЛЕМА ЛИНЕЙНОСТИ ДЛЯ НЕОГРАНИЧЕННЫХ МЕР НА ОРТОПРОЕКТОРАХ

01.01.01 – математический анализ

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико–математических наук

Казань – 2009

Работа выполнена на кафедре математического анализа государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Казанский государственный университет им. В. И. Ульянова-Ленина».

Научный руководитель: *доктор физико-математических наук, профессор*
Шерстнев Анатолий Николаевич

Официальные оппоненты: *доктор физико-математических наук, доцент*
Амосов Григорий Геннадьевич,
кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник
Тихонов Олег Евгеньевич

Ведущая организация: *Воронежский государственный университет*

Защита состоится 24 декабря 2009 года в 17.30 на заседании диссертационного совета Д 212.081.10 при Казанском государственном университете им. В. И. Ульянова-Ленина по адресу: 420008, г. Казань, ул. Профессора Нужина, 1/37, НИИММ, ауд. 324.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке имени Н. И. Лобачевского Казанского государственного университета им. В. И. Ульянова-Ленина (г. Казань, ул. Кремлевская, 18).

Автореферат разослан 10 ноября 2009 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д 212.081.10 при КГУ
канд. физ.-мат. наук, доцент Е. К. Липачев

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Один из основных методов при изучении неограниченных линейных операторов в гильбертовых пространствах заключается в переходе от заданного оператора к ассоциированному с ним семейству ограниченных линейных операторов. В качестве известных примеров такого подхода можно привести характеризацию симметрического оператора его преобразованием Кэли, характеризацию самосопряженного оператора семейством значений его резольвенты или однопараметрическим семейством ортопроекторов, ассоциированным с его спектральным разложением единицы. В один ряд с вышеперечисленными инструментами изучения неограниченных операторов также следует поставить и метод графиков, который, однако, не получил столь широкого освещения в литературе. Частично восполнить этот пробел является главной целью предлагаемой работы.

Впервые графики операторов были введены фон Нейманом[1] при изучении фундаментальных свойств неограниченных линейных операторов. Позднее М. Х. Стоуном[2] было введено понятие характеристической матрицы, ассоциированной с графиком замкнутого оператора, что позволило свести изучение неограниченных замкнутых операторов к исследованию ограниченных операторов.

Метод графиков оказался особенно полезным в теории возмущений линейных операторов и в изучении сходимости неограниченных операторов (Като[3], Рид и Саймон[4], Кулькарни и Рамеш[5]). С использованием граф-топологии Ли и Нэшедом[6] было дано обобщение метода градиента для обычных линейных уравнений с ограниченным оператором на случай линейных уравнений с произвольным замкнутым неограниченным оператором. Более того,

---

[1] Von Neumann J. *Zur Algebra der Funktionaloperationen und Theorie der normalen Operatoren* // Math. Annalen. – 1929. – Bd. 102. – S. 370–427.

[2] Stone M. H. *On unbounded operators in Hilbert space* // J. Ind. Math. Soc. – 1951. – V. 15. – P. 155–192.

[3] Като Т. *Теория возмущений линейных операторов* / Пер. с англ. под ред. проф. В. П. Маслова, М.: Мир, 1972. – 739 с.

[4] Рид М., Саймон Б. *Методы современной математической физики. I. Функциональный анализ.* – М.: Мир, 1977. – 360 с.

[5] Kulkarni S. H., Ramesh G. *The carrier graph topology*. Preprint (shk@iitm.ac.in, rameshg@iitm.ac.in).

[6] Lee S. J., Nashed M. Z. *Gradient method for nondensely defined closed unbounded linear operators* // Proc. Amer. Math. Soc. – 1983. – V. 88. – № 3. – P. 429–435.

как было показано Эль-Саккари[7], в теории автоматического контроля граф-метрика оказалась наиболее подходящей метрикой для описания критериев устойчивости систем с обратной связью.

С применением графиков В. М. Мануйловым[8] был построен K-теорный непрерывный целочисленный инвариант для широкого класса неограниченных симметрических операторов. Благодаря работам Нассбаума[9] и Леннона[10] графики легли в основу теории прямых интегралов для неограниченных операторов, что позволило свести изучение этой теории к исследованию прямых интегралов от ограниченных операторов.

Кроме того, техника графиков нашла неожиданное применение при исследовании проблем продолжения ортоаддитивных отображений, заданных на ортопроекторах. Так, Г. Дай[11] с помощью метода графиков показал, что проекторный ортоизоморфизм между W*-алгебрами определенного типа продолжается до прямой суммы *-изоморфизма и *-антиизоморфизма. С другой стороны, Г. Д. Луговой и А. Н. Шерстневым[12] с использованием конструкций, основанных на графиках компактных операторов, было показано существование неограниченной ортоаддитивной меры на ортопроекторах подходящей алгебры фон Неймана, которая не продолжается до веса.

В данной работе продолжена разработка техники графиков замкнутых операторов, а также приведены приложения инструмента графиков к теории неограниченных операторов.

Другое направление исследования предлагаемой работы связано с проблемой линейности в некоммутативной теории меры. Данная проблема состоит в изучении возможностей продолжения ортоаддитивных мер на ортопроекторах алгебры фон Неймана до линейных функционалов.

[7]El-Sakkari A. K. *The gap metric: robustness of stabilization of feedback systems* // IEEE Trans. Automat. Contr. – 1985. – V. 30. – № 3. – P. 240–247.

[8]Мануйлов В. М. *Инвариант пары почти коммутирующих неограниченных операторов* // Функц. анализ и его прил. – 1998. – Т. 32. – Вып. 4. – С. 88–91.

[9]Nussbaum A. E. *Reduction theory for unbounded closed operators in Hilbert space* // Duke Math. J. – 1964. – V. 31. – № 1. – P. 33–44.

[10]Lennon M. J. J. *On sums and products of unbounded operators in Hilbert space* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1974. – V. 198. – P. 273–285.

[11]Dye H. A. *On the geometry of projections in certain operator algebras* // Ann. of Math. – 1955. – V. 61. – № 1. – P. 73–89.

[12]Lugovaya G. D., Sherstnev A. N. *On the extension problem for unbounded measures on projections* // Math. Slovaca. – 2000. – V. 50. – № 4. – P. 473–481.

Впервые проблема линейности была поставлена и решена для факторов и унитарно инвариантных мер в классических трудах фон Неймана и Мюррея[13 14]. В полном объеме программа продолжения таких мер до интеграла реализована И. Сигалом[15]. Проблема линейности для ограниченных ортоаддитивных мер, не обязательно унитарно инвариантных, была сформулирована Дж. Макки[16] в виде гипотезы, что каждая ортоаддитивная вероятностная мера на ортопроекторах алгебры всех ограниченных линейных операторов в гильбертовых пространствах продолжается до линейного функционала. Несколькими месяцами ранее выхода из печати статьи Дж. Макки положительное решение этой проблемы было получено А. Глизоном[17]. Для ограниченных мер на ортопроекторах алгебр фон Неймана, в том числе и конечно-аддитивных, указанная проблема получила исчерпывающее решение благодаря усилиям ряда математиков четверть века спустя (Матвейчук[18], Кристенсен[19], Йедон[20 21]).

Проблема линейности для неограниченных мер на ортопроекторах алгебр фон Неймана в контексте их продолжения до весов была сформулирована А. Н. Шерстневым[22]. Несколькими годами позже Г. Д. Луговой и А. Н. Шерстневым[23] было получено положительное решение этой проблемы для неограниченных σ-аддитивных мер на ортопроекторах алгебры всех ограниченных линейных операторов в гильбертовых пространствах. Затем

[13]Murray F., von Nemann J. *On rings of operators* // Ann. Math. – 1936. – V. 37. – P. 116–129.

[14]Murray F., von Nemann J. *On rings of operators* // Ann. Math. – 1936. – V. 41. – P. 208–248.

[15]Segal I. *A non-commutative extension of abstract integration* // Ann. Math. – 1953. – V. 57. – P. 401–457.

[16]Mackey G. *Quantum mechanics and Hilbert space* // Amer. Math. Monthly. – 1957. – V. 64. – № 8. – P. 45–57.

[17]Gleason A. M. *Measures on the closed subspaces of Hilbert space* // J. Math. Mech. – 1957. – V. 6. – P. 885–894.

[18]Матвейчук М. С. *Описание конечных мер в полуконечных алгебрах* // Функц. анализ и его прилож. – 1981. – V. 15. – №. 3. – С. 41–53.

[19]Christensen E. *Measures on projections and physical states* // Comm. Math. Phys. – 1982. – V. 86. – P. 113–115.

[20]Yeadon F. *Measures on projections in W^*-algebras of type II_1* // Bull. London Math. Soc. – 1983. – V. 15. – P. 1139-145.

[21]Yeadon F. *Finitely aditive measures on projections in finite W^*-algebras* // Bull. London Math. Soc. – 1984. – V. 16. – P. 145–150.

[22]Шерстнев А. Н. *К общей теории меры и интеграла в алгебрах Неймана* // Изв. вузов. Математика. – 1982. – № 8. – С. 20–35.

[23]Луговая Г. Д., Шерстнев А. Н. *О проблеме линейности для неограниченных мер на проекторах* // Функц. анализ (Ульяновск). – 1984. – № 23. – С. 76–81.

этот результат был распространен на случай произвольных полуконечных алгебр фон Неймана М. С. Матвейчуком[24]. В 1992 году А. Н. Шерстневым[25] был поставлен вопрос о возможности продолжения неограниченных конечно-аддитивных мер на ортопроекторах алгебр фон Неймана до веса. Несколько лет спустя Г. Д. Луговой и А. Н. Шерстневым[26] был дан отрицательный ответ на этот вопрос.

В настоящей работе продолжено исследование проблематики линейности для неограниченных конечно-аддитивных мер на ортопроекторах и конечно-аддитивных мер на ортоидеалах алгебр фон Неймана и получен ряд новых результатов.

Цель работы. Основными целями предлагаемой работы являются:

1. Разработка инструмента графиков замкнутых операторов в гильбертовых пространствах.
2. Изучение с помощью графиков свойств замкнутых операторов, действующих в гильбертовых пространствах.
3. Исследование возможности продолжения до веса неограниченных конечно-аддитивных мер на ортопроекторах и конечно-аддитивных мер на ортоидеалах алгебр фон Неймана.

Методы исследований. В диссертационной работе используются методы из следующих областей:

1. Теория неограниченных замкнутых операторов в гильбертовых пространствах.
2. Спектральная теория и функциональное исчисление для самосопряженных операторов.
3. Некоммутативная теория меры для алгебр фон Неймана.

Научная новизна. Все полученные результаты являются новыми и снабжены подробными доказательствами. Они дополняют известные факты из

[24] Матвейчук М. С. *Продолжение неограниченных мер до веса* // Изв. вузов. Математика. – 1987. – № 4. – С. 47–51.

[25] Sherstnev A. N. *On certain problems in the theory of unbounded measures on projections* // Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena. – 1994. – V. 42. – P. 357–366.

[26] Lugovaya G. D., Sherstnev A. N. *On the extension problem for unbounded measures on projections* // Math. Slovaca. – 2000. – V. 50. – № 4. – P. 473–481.

теории графиков замкнутых операторов в гильбертовых пространствах и теории некоммутативной меры в алгебрах фон Неймана.

Теоретическая и практическая значимость работы. Работа носит теоретический характер. Ее результаты могут быть использованы в различных областях теории неограниченных линейных операторов в гильбертовых пространствах и некоммутативной теории неограниченных мер.

Основные результаты диссертации. Основные результаты работы следующие:

1. Построены новые представления алгебр фон Неймана, ассоциированные с графиками замкнутых операторов. Установлена их связь с размножением алгебр фон Неймана.
2. В терминах графиков получен ряд исчерпывающих характеризаций различных свойств замкнутых операторов и их подклассов.
3. Изучены основные бинарные операции, определенные на замкнутых операторах, в контексте графиков этих операторов. Приведено применение метода графиков к теории прямых интегралов.
4. Доказано, что для произвольного кардинального числа $n \geqslant 2$ существует алгебра фон Неймана типа I_n и ограниченная полуконечная конечно-аддитивная мера на идеале этой алгебры, которая не продолжается до веса.
5. Установлено, что в произвольной алгебре фон Неймана, не содержащей прямых слагаемых типа I_n, где n — кардинальное число, не меньшее 2, всякая конечно-аддитивная мера на идеале этой алгебры продолжается до веса.

Апробация работы. Результаты, полученные в диссертации, представлялись

1. на молодежной научной конференции "Лобачевские чтения-2005" (Казань, 2005 г.);
2. на международной конференции "Теория функций, ее приложения и смежные вопросы" (Казань, 2007 г.);
3. на молодежной научной конференции "Лобачевские чтения-2008" (Казань, 2008 г.);

4. на международной конференции "Теория функций, ее приложения и смежные вопросы" (Казань, 2009 г.);
5. на итоговых научных конференциях Казанского государственного университета им. В. И. Ульянова-Ленина (2005–2009 гг.).

Публикации автора. Результаты диссертации опубликованы в четырех тезисах [1]-[4] и одной статье [5] из списка ВАК общим объемом 27 страниц.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения и трех глав. Общий объем диссертации 141 страница. Библиографический список использованных источников содержит 55 наименований.

Содержание работы. Во **введении** проводится общий обзор исследований, связанных с темой диссертационной работы, указываются цели, преследуемые автором при написании работы, перечисляются основные результаты, полученные автором, приводится краткое изложение содержания работы.

Первая глава посвящена изучению графиков замкнутых операторов, действующих в гильбертовых пространствах.

В разделе 1.1 приводятся общие для всей работы соглашения и обозначения.

В разделе 1.2 вводятся операторные аналоги Δ_T и ∇_T тригонометрических функций $\cos$ и $\sin$, а также изучаются их свойства.

В разделе 1.3 строятся различные представления алгебр фон Неймана, индуцированные графиками замкнутых операторов. Кроме того, устанавливается связь этих представлений с размножением алгебр фон Неймана. Основные результаты данного раздела сформулированы в теоремах 1 и 2.

Для гильбертовых пространств X и Y через $\mathcal{CL}(X,Y)$ (соответственно $\mathcal{DC}(X,Y)$, $\mathcal{B}(X,Y)$, $\mathcal{BF}(X,Y)$, $\mathcal{C}(X,Y)$, $\mathcal{FD}(X,Y)$) будем обозначать класс всех замкнутых (соответственно плотно заданных замкнутых, всюду определенных ограниченных, ограниченных фредгольмовых, компактных, конечномерных) операторов из X в Y. Если $X = Y$, то Y в приведенных обозначениях будем опускать. Для $T \in \mathcal{CL}(X,Y)$ будут использоваться следующие обозначения: $\widehat{T} \in \mathcal{DC}(X,Y)$ — каноническое продолжение оператора T нулем, $\Gamma(T)$ — график T, $P_{\Gamma(T)}$ — ортопроектор в $X \oplus Y$ на $\Gamma(T)$. Если $\mathcal{M}$ — алгебра фон Неймана, то $\mathcal{M}^+$ — конус всех положительных операторов в

$\mathcal{M}$, $\mathcal{M}^{pr}$ — семейство всех ортопроекторов в $\mathcal{M}$. Пусть далее K_1, K_2 — комплексные гильбертовы пространства, $H = K_1 \oplus K_2$. При этом, если $K_1 = K_2$, то индексы будем опускать и считать, что $H = K \oplus K$.

Теорема 1. *Пусть $T \in \mathcal{DC}(K_1, K_2)$, $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$ — алгебры фон Неймана, действующие в K_1 и K_2 соответственно. Определим отображения $\Psi_T : \mathcal{M}_1 \to \mathcal{B}(H)$, $\Psi_T^{\perp} : \mathcal{M}_2 \to \mathcal{B}(H)$, а также $\Phi_T : \mathcal{M}_1 \oplus \mathcal{M}_2 \to \mathcal{B}(H)$ следующими правилами*

$$\Psi_T(a) \equiv \begin{pmatrix} \Delta_T a \Delta_T & \Delta_T a \nabla_{T^*} \\ \nabla_T a \Delta_T & \nabla_T a \nabla_{T^*} \end{pmatrix}, \quad \Psi_T^{\perp}(b) \equiv \begin{pmatrix} \nabla_{T^*} b \nabla_T & -\nabla_{T^*} b \Delta_{T^*} \\ -\Delta_{T^*} b \nabla_T & \Delta_{T^*} b \Delta_{T^*} \end{pmatrix},$$
$$\Phi_T(a \oplus b) \equiv \Psi_T(a) + \Psi_T^{\perp}(b),$$

где $a \in \mathcal{M}_1, b \in \mathcal{M}_2$. Тогда (Ψ_T, H), $(\Psi_T^{\perp}, H)$ и (Φ_T, H) — инъективные представления алгебр $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_2$ и $\mathcal{M}_1 \oplus \mathcal{M}_2$ соответственно, определяющие пространственные изоморфизмы алгебр $\mathcal{M}_1$ на $\Psi_T(\mathcal{M}_1)$, $\mathcal{M}_2$ на $\Psi_T^{\perp}(\mathcal{M}_2)$ и $\mathcal{M}_1 \oplus \mathcal{M}_2$ на $\Phi_T(\mathcal{M}_1 \oplus \mathcal{M}_2)$ соответственно.

Теорема 2. *Пусть $\mathcal{M}$ — алгебра фон Неймана, действующая в K, $T \in \mathcal{DC}(K)$ и $\rho : \mathcal{B}(K) \to \mathcal{B}(H)$ — отображение, действующее по правилу*

$$\rho(a) = a \oplus a \quad (a \in \mathcal{B}(K)).$$

Тогда следующие утверждения равносильны

(i) $T \, \eta \, \mathcal{M}'$;

(ii) $\Psi_T(a) = P_{\Gamma(T)} \rho(a) P_{\Gamma(T)} \quad (a \in \mathcal{M})$;

(iii) $\Psi_T^{\perp}(a) = P_{\Gamma(T)}^{\perp} \rho(a) P_{\Gamma(T)}^{\perp} \quad (a \in \mathcal{M})$.

В разделе 1.4 вводится понятие стоуновской характеристической матрицы замкнутого оператора и находится ее явный вид в терминах тригонометрических операторов. Получена характеризация ортопроекторов, являющихся графиками некоторых замкнутых операторов. Кроме того, установлена взаимосвязь между основными понятиями, связанными с замкнутым оператором, и элементами его характеристической матрицы.

Во **второй главе** рассматриваются различные приложения техники графиков к теории неограниченных операторов.

В разделе 2.1 приводятся характеризации различных свойств замкнутых операторов и их подклассов в терминах графиков. Впервые исследование в данном направлении было начато М. Х. Стоуном[27]. Им были найдены характеризации ограниченных, самосопряженных, нормальных и унитарных операторов, действующих в гильбертовом пространстве, в контексте их характеристических матриц. Описание некоторых классов замкнутых операторов с помощью тригонометрических операторов были даны В. Кауфманом[28 29]. Автором получен ряд новых результатов, дополняющих результаты М. Х. Стоуна и В. Кауфмана. В терминах характеристических матриц и тригонометрических операторов получены исчерпывающие характеризации таких подклассов замкнутых операторов, как классы ограниченных, обратимых, компактных, конечномерных, фредгольмовых, гипонормальных, квазинормальных, нормальных, эрмитовых, самосопряженных, положительных, аккретивных, инволютивных, присоединенных к алгебре фон Неймана, τ-измеримых, принадлежащих к некоторому идеалу и других типов операторов. Ниже сформулированы выдержки из этих результатов:

Теорема 3. *Пусть $T \in \mathcal{DC}(K_1, K_2)$ и (q_{ij}) — характеристическая матрица T. Тогда*

(i) $T \in \mathcal{B}(K_1, K_2) \Leftrightarrow q_{11}$ *обратим*;

(ii) T *обратим* $\Leftrightarrow 1 - q_{11}$ *обратим*;

(iii) T *гомеоморфен* $\Leftrightarrow q_{21}$ *обратим*;

(iv) $T \in \mathcal{BF}(K_1, K_2) \Leftrightarrow q_{21} \in \mathcal{BF}(K_1, K_2)$;

(v) $T \in \mathcal{FD}(K_1, K_2) \Leftrightarrow q_{21} \in \mathcal{FD}(K_1, K_2)$;

(vi) $T \in \mathcal{C}(K_1, K_2) \Leftrightarrow q_{22} \in \mathcal{C}(K_2)$.

Теорема 4. *Пусть $T \in \mathcal{DC}(K)$ и (q_{ij}) — характеристическая матрица T. Тогда*

(i) T *гипонормален* $\Leftrightarrow q_{11} + q_{22} \leqslant 1$;

(ii) T *формально нормален* $\Leftrightarrow q_{11} = \sqrt{1 - q_{22}}\, p \sqrt{1 - q_{22}}$, *где* $p \in \mathcal{B}(K)^{pr}$;

[27] Stone M. H. *On unbounded operators in Hilbert space* // J. Ind. Math. Soc. – 1951. – V. 15. – P. 155–192.

[28] Kaufman W. E. *Representing a closed operator as a quotient of continuous operators* // Proc. Amer. Math. Soc. – 1978. – V. 72. – № 3. – P. 531–534.

[29] Kaufman W. E. *Closed operators and pure contractions in Hilbert space* // Proc. Amer. Math. Soc. – 1983. – V. 87. – № 1. – P. 83–87.

(iii) T *квазинормален* $\Leftrightarrow$ q_{11} *и* q_{21} *коммутируют друг с другом*;

(iv) T *нормален* $\Leftrightarrow$ $q_{11}+q_{22}=1$;

(v) T *эрмитов* $\Leftrightarrow$ $q_{11}q_{21}$ *самосопряжен*;

(vi) T *положителен* $\Leftrightarrow$ q_{21} *положителен*;

(vii) T *аккретивен* $\Leftrightarrow$ $q_{11}q_{21}$ *аккретивен*;

(viii) T — *инволюция* $\Leftrightarrow$ $q_{11}+q_{21}=q_{22}+q_{12}$;

(ix) T — *оператор с компактной резольвентой* $\Leftrightarrow$ $q_{11}\in\mathcal{C}(K)$.

Теорема 5 (критерий τ-измеримости). *Пусть $\mathcal{M}$ — алгебра фон Неймана, действующая в K, M_2 — алгебра матриц 2-го порядка над комплексным полем и τ — точный нормальный полуконечный след на $\mathcal{M}$. Определим точный нормальный полуконечный след $\widetilde{\tau}:(\mathcal{M}\otimes M_2)^+\to[0,+\infty]$ равенством*

$$\widetilde{\tau}(A)\equiv\tau(a_{11})+\tau(a_{22})\quad(A\in(\mathcal{M}\otimes M_2)^+),$$

где a_{ij} — элементы операторной матрицы A. Тогда оператор $T\in\mathcal{DC}(K)$ с графиком Q τ-измерим в том и только том случае, когда существует последовательность графиков $(Q_n)\subset(\mathcal{M}\otimes M_2)^{pr}$ ограниченных операторов такая, что $Q_n\nearrow Q$ и $\widetilde{\tau}(Q-Q_n)\to 0$.

В разделе 2.2 вводится новая операция верхней грани "$\vee$" двух замкнутых операторов. А именно, верхняя грань $A\vee B$ определяется как наименьший замкнутый оператор, являющийся расширением замкнутых операторов A и B (если таковой существует). С использованием техники графиков получен ряд интересных свойств этой операции:

Теорема 6. *Пусть $A,B\in\mathcal{CL}(K_1,K_2)$ такие, что $P_{\Gamma(A)}$ и $P_{\Gamma(B)}$ коммутируют, и пусть определен оператор $C=A\vee B\in\mathcal{CL}(K_1,K_2)$. Тогда*

(i) $\widehat{A}\in\mathcal{B}(K_1,K_2)$, $\widehat{B}\in\mathcal{C}(K_1,K_2)$ $\Rightarrow$ $\widehat{C}\in\mathcal{B}(K_1,K_2)$;

(ii) $\widehat{A},\widehat{B}\in\mathcal{C}(K_1,K_2)$ $\Rightarrow$ $\widehat{C}\in\mathcal{C}(K_1,K_2)$;

(iii) $\widehat{A},\widehat{B}\in\mathcal{FD}(K_1,K_2)$ $\Rightarrow$ $\widehat{C}\in\mathcal{FD}(K_1,K_2)$;

(iv) $\widehat{A}\in\mathcal{BF}(K_1,K_2)$, $\widehat{B}\in\mathcal{C}(K_1,K_2)$ $\Rightarrow$ $\widehat{C}\in\mathcal{BF}(K_1,K_2)$.

Теорема 7. *Пусть $A, B \in \mathcal{CL}(K)$ и пусть определен оператор $C = A \vee B \in \mathcal{CL}(K)$. Тогда, если $\mathcal{M}$ — алгебра фон Неймана с точным нормальным полуконечным следом τ, действующая в K, а $\mathcal{J}$ — *-идеал в $\mathcal{B}(K)$ такой, что $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{C}(K)$, то справедливы утверждения*

(i) $\widehat{A}, \widehat{B} \geqslant 0 \Rightarrow \widehat{C} \geqslant 0$, *если* $P_{\Gamma(A)} P_{\Gamma(B)} = 0$;

(ii) $A, B\, \eta\, \mathcal{M} \Rightarrow C\, \eta\, \mathcal{M}$;

(iii) A *τ-измерим и* $B\, \eta\, \mathcal{M} \Rightarrow C$ *τ-измерим*;

(iv) $\widehat{A}, \widehat{B} \in \mathcal{J} \Rightarrow \widehat{C} \in \mathcal{J}$, *если* $P_{\Gamma(A)}$ *и* $P_{\Gamma(B)}$ *коммутируют.*

Раздел 2.3 посвящен описанию графиков суммы, произведения и отношения замкнутых операторов. Подобного рода исследование было начато Ленноном[30]. Им с помощью техники биграфиков были найдены характеристические матрицы полусуммы $\frac{1}{2}(A + B)$ и произведения BA двух произвольных замкнутых операторов A и B в виде предельных выражений, составленных из элементов характеристических матриц операторов A и B. Автором получены аналогичные формулы для суммы $A + B$ и отношения B/A замкнутых операторов A и B. Формула для отношения операторов приведена ниже:

Теорема 8. *Пусть $A, B \in \mathcal{CL}(K)$ такие, что $\ker A \subseteq \ker B$. Тогда*

$$P_{\overline{\Gamma(B/A)}} = I - s\text{-}\lim_{n\to\infty} \left(I - \begin{pmatrix} s_{22} & s_{24} \\ s_{42} & s_{44} \end{pmatrix} \right)^n,$$

где s_{ij} — элементы бихарактеристической матрицы операторов A и B, I — тождественный оператор в H.

Во второй части раздела используется алгебраический подход: получены представления графиков произведения AB, отношения B/A и суммы $A + B$ в виде решеточных многочленов от графиков замкнутых операторов A и B. Кроме того, в терминах графиков A и B даны критерии замыкаемости и плотной определенности произведения, отношения и суммы замкнутых операторов A и B. В теоремах 9 и 10 приведены точные формулировки результатов, полученных для произведения операторов.

[30]Lennon M. J. J. *On sums and products of unbounded operators in Hilbert space* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1974. – V. 198. – P. 273–285.

Пусть K_i, $i=\overline{1,3}$, — комплексные гильбертовы пространства, $L \equiv K_1 \oplus K_2 \oplus K_3$, P_i, $i=\overline{1,3}$, — ортопроекторы в L на K_i, I — тождественный оператор в L.

Теорема 9. *Пусть* $A \in \mathcal{CL}(K_1, K_2)$, $B \in \mathcal{CL}(K_2, K_3)$. *Тогда*

$$P_{\overline{\Gamma(BA)}} = (((P_{\Gamma(A)} \oplus P_3) \wedge (P_{\Gamma(B)} \oplus P_1)) \vee P_2) \wedge (P_1 \oplus P_3).$$

Более того

(i) BA *замыкаем тогда и только тогда, когда* $(((P_{\Gamma(A)} \oplus P_3) \wedge (P_{\Gamma(B)} \oplus P_1)) \vee P_2) \wedge P_3 = 0;$

(ii) BA *плотно определен тогда и только тогда, когда* $((((P_{\Gamma(A)} \oplus P_3) \wedge (P_{\Gamma(B)} \oplus P_1)) \vee P_2) \wedge (P_1 \oplus P_3)) \vee (P_2 \oplus P_3) = I.$

Теорема 10. *Пусть* $A \in \mathcal{CL}(K_1, K_2)$, $B \in \mathcal{CL}(K_2, K_3)$. *Обозначим*

$$P_{\Gamma(B)} \circ P_{\Gamma(A)} \equiv (P_{\Gamma(A)} \vee P_{\Gamma(B)}) \wedge (P_1 \oplus P_3).$$

Тогда

(i) $P_{\Gamma(B)} \circ P_{\Gamma(A)} \geqslant P_{\overline{\Gamma(-BA)}}$;

(ii) A *ограничен* $\Rightarrow P_{\Gamma(B)} \circ P_{\Gamma(A)} = P_{\Gamma(-BA)}$;

(iii) B^{-1} *ограничен* $\Rightarrow P_{\Gamma(B)} \circ P_{\Gamma(A)} = P_{\Gamma(-BA)}$;

(iv) $B \in \mathcal{B}(K_2, K_3) \Rightarrow P_{\Gamma(B)} \circ P_{\Gamma(A)} = P_{\overline{\Gamma(-BA)}}$;

(v) A *обратим* $\Rightarrow P_{\Gamma(B)} \circ P_{\Gamma(A)} = P_{\overline{\Gamma(-BA)}}$;

(vi) $\Gamma(A) + \Gamma(B)$ *замкнуто* $\Rightarrow P_{\Gamma(B)} \circ P_{\Gamma(A)} = P_{\Gamma(-BA)}$;

(vii) *если* $\Gamma(A) + \Gamma(UB)$ *замкнуто, где* $U : K_3 \to K_1$ *— изоморфизм, то* $P_{\Gamma(B)} \circ P_{\Gamma(A)} = P_{\overline{\Gamma(-BA)}}$. *Если к тому же* $\Gamma(A) \cap \Gamma(UB) = \{\theta\}$, *то* $P_{\overline{\Gamma(-BA)}} = P_{\Gamma(-BA)}$.

В разделе 2.4 приводится применение техники графиков к теории прямых интегралов замкнутых операторов. Ленноном[31] были получены формулы почленного интегрирования суммы и произведения замкнутых разложимых

[31] Lennon M. J. J. *On sums and products of unbounded operators in Hilbert space* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1974. – V. 198. – P. 273–285.

операторов. Автором получены аналогичные результаты для отношения замкнутых операторов B/A и их верхней грани $A \vee B$. Точная формулировка результата для верхней грани приведена ниже:

Теорема 11. *Пусть Z — σ-компактное локально компактное пространство, μ — пополнение борелевой меры на Z, $t \to K(t)$ — μ-измеримое поле сепарабельных гильбертовых пространств, $K = \int^{\oplus} K(t)\, d\mu(t)$ и $A, B \in \mathcal{CL}(K)$ — разложимые операторы. Тогда оператор $A \vee B$ определен тогда и только тогда, когда $A(t) \vee B(t)$ определен почти всюду. В этом случае*

(i) $A \vee B \in \mathcal{DC}(K) \Leftrightarrow A(t) \vee B(t) \in \mathcal{DC}(K(t))$ *п.в.*;

(ii) $A \vee B = \displaystyle\int^{\oplus} A(t) \vee B(t)\, d\mu(t)$.

В разделе 2.5 приводится явный вид характеристической матрицы тензорного произведения замкнутых операторов в терминах характеристических матриц этих операторов, полученный Х. Косаки[32]. С использованием этого результата, автором получены формулы тригонометрических операторов для тензорного произведения $A \otimes B$ замкнутых операторов в терминах тригонометрических операторов A и B. Кроме того, приводятся аналогичные формулы для графика прямой суммы замкнутых операторов.

Третья глава посвящена исследованию проблемы линейности для неограниченных конечно-аддитивных мер на ортопроекторах и конечно-аддитивных мер на ортоидеалах алгебр фон Неймана.

В разделе 3.1 даются обозначения и определения, связанные с проблематикой линейности.

В разделе 3.2 изучаются свойства ортоидеалов, имеющие отношение к проблеме линейности, а также выводятся свойства ортоидеалов, представляющие самостоятельный интерес.

В разделе 3.3 изучается вопрос о возможности продолжения до веса неограниченных полуконечных конечно-аддитивных мер на ортопроекторах алгебр фон Неймана. Г. Д. Луговой и А. Н. Шерстневым[33] с использованием

[32] Kosaki H. *Characteristic matrix of the tensor product of operators* // Oper. Theor. – 1998. – V. 40. – P. 357–372.

[33] Lugovaya G. D., Sherstnev A. N. *On the extension problem for unbounded measures on projections* // Math. Slovaca. – 2000. – V. 50. – № 4. – P. 473–481.

техники графиков было показано существование неограниченной полуконечной конечно-аддитивной меры на ортопроекторах в подходящей алгебре фон Неймана, не продолжающейся до веса. Автором предложен упрощенный и конструктивный способ доказательства этого факта, причем без привлечения метода графиков. Более того, в работе показано, что при дополнительных ограничениях, налагаемых на структуру меры и тип алгебры фон Неймана, рассматриваемый вопрос имеет положительное решение:

Теорема 12. *Пусть $\mathcal{M}$ — алгебра фон Неймана, не имеющая слагаемых типа I_n, $n \geqslant 2$, и $\mu : \mathcal{M}^{\mathrm{pr}} \to [0, +\infty]$ — конечно-аддитивная мера такая, что $J_\mu \equiv \{p \in \mathcal{M}^{\mathrm{pr}} : \mu(p) < +\infty\}$ — идеал. Тогда μ продолжается до веса $\varphi : \mathcal{M}^+ \to [0, +\infty]$. При этом вес φ однозначно определен на конусе, порожденном идеалом J_μ, и принимает на нем лишь конечные значения.*

Раздел 3.4 посвящен исследованию возможности продолжения до веса полуконечных конечно-аддитивных мер на ортоидеалах алгебр фон Неймана. Автором получено отрицательное решение рассматриваемой проблемы:

Теорема 13. *Для любого кардинального числа $n \geqslant 2$ существует алгебра фон Неймана $\mathcal{M}$ типа I_n, идеал J в $\mathcal{M}$ и полуконечная конечно-аддитивная мера $\mu : J \to \mathbb{R}^+$, $\sup\limits_{p \in J} \mu(p) < \infty$, не продолжающаяся до веса.*

Кроме того, в работе показывается, что для конечно-аддитивных мер на ортоидеалах имеет место аналог теоремы 12. Также получен следующий любопытный результат:

Теорема 14. *Пусть $\mu : J \to \mathbb{R}^+$ — конечно-аддитивная мера на ортоидеале J алгебры $\mathcal{B}(H)$, содержащем трехмерный ортопроектор. Тогда μ продолжается до полуконечной конечно-аддитивной меры.*

Автор выражает глубокую признательность и искреннюю благодарность своему научному руководителю Шерстневу Анатолию Николаевичу за предложенную тематику исследований и всестороннюю поддержку в написании данной работы.

Публикации автора по теме диссертации

1. Тимиршин, М. Р. *Представление алгебры фон Неймана, индуцированное плотно заданным замкнутым оператором* / М. Р. Тимиршин // Тр. матем. центра им. Н. И. Лобачевского. – 2005. – Т. 31. – С. 152–154.

2. Тимиршин, М. Р. *О свойствах графиков замкнутых операторов и операциях на них* / М. Р. Тимиршин // Тр. матем. центра им. Н. И. Лобачевского. – 2007. – Т. 35. – С. 240–243.

3. Тимиршин, М. Р. *Конструкции неограниченных мер на ортопроекторах* / М. Р. Тимиршин // Тр. матем. центра им. Н. И. Лобачевского. – 2008. – Т. 37. – С. 177–178.

4. Тимиршин, М. Р. *О проблеме продолжения неограниченных мер на ортопроекторах* / М. Р. Тимиршин // Тр. матем. центра им. Н. И. Лобачевского. – 2009. – Т. 38. – С. 278–279.

5. Тимиршин, М. Р. *О некоторых свойствах графиков замкнутых операторов* / М. Р. Тимиршин // Изв. вузов. Математика. – 2009. – № 9. – С. 53–68.